Μετασχημ/μός Fourier Διακριτών Σημάτων - Διακριτός Μετασχημ/μός Fourier

Στην απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος ο μετασχηματισμός :

h(i) $\rightarrow$ H($e^{j\Omega}$)

ορίζεται ως μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας h(i).

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για μία συνεχή συνάρτηση του Ω σε αντίθεση με την αρχική ακολουθία h(n) που είναι μία συνάρτηση διακριτής μεταβλητής.

Επομένως με τον μετασχηματισμό αυτό περνάμε σε ένα σήμα συνεχούς μεταβλητής.

Η εναλλαγή :

\
Σήμα διακριτής μεταβλητής   Σήμα συνεχούς μεταβλητής

έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και σχετίζεται με την περιοδικότητα των σημάτων.

Για να γίνει κατανοητό αυτό το φαινόμενο θα προσπαθήσουμε να δούμε το θέμα του μετασχηματισμού Fourier ολικά αρχίζοντας από τα σήματα συνεχούς χρόνου. Αυτό γίνεται για λόγους βαθύτερης κατανόησης του τι συμβαίνει στα σήματα διακριτού χρόνου που είναι το βασικό αντικείμενό μας. Ορίζουμε στην συνέχεια ένα αριθμό μεγεθών που θα μας βοηθήσουν στην ανάλυση που ακολουθήσει.

t	Συνεχής χρόνος
f	"Συνεχής" Συχνότητα
T_s	Χρονική απόσταση μεταξύ δειγμάτων σήματος διακριτού χρόνου
Φ_s	Απόσταση μεταξύ αρμονικών στον χώρο της συχνότητας όταν υπάρχει διακριτή υφή
T	Περίοδος ενός σήματος όταν είναι περιοδικό στον χρόνο
f_s	Συχνότητα δειγματοληψίας χρονικού σήματος
N	Αριθμός δειγμάτων που αντιστοιχεί σε μία χρονική περίοδο T
F	Σχετική ("Διακριτή") Συχνότητα

Ορισμοί μεγεθών συνεχούς/διακριτού χρόνου και συχνότητας.

$\omega=2\pi f$, $\omega_\varsigma=2\pi f_s$
$\Omega=2\pi F$, $T=NT_s$
$\Omega\varsigma=2\pi\Phi_s$ $F=fT_s=f/f_s$

Παρατήρηση:

|F|<=1/2 **à** |Ω|<=π

Θα διακρίνουμε στην συνέχεια τέσσερις περιπτώσεις που θα εξεταστούν πιο συγκεκριμένα :

- Συνεχής χρόνος και Συνεχής συχνότητα
- Συνεχής χρόνος και “Διακριτή” συχνότητα
- Διακριτός χρόνος και Συνεχής συχνότητα
- Διακριτός χρόνος και “Διακριτή” συχνότητα

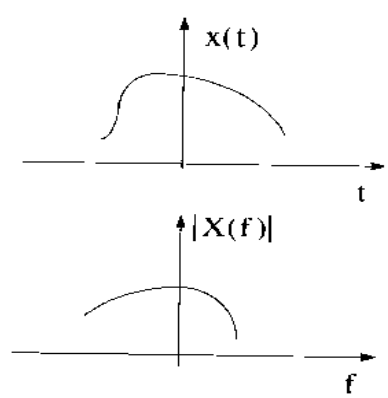
Α) Συνεχής Χρόνος και Συνεχής Συχνότητα : Το πέρασμα από τον χώρο του χρόνου στον χώρο της συχνότητας και αντίστροφα γίνεται με το ζευγάρι των σχέσεων

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j2p\,ft}\,dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,e^{j2p\,ft}\,df$$

Το σχήμα δίνει μία σχηματική παράσταση του περάσματος από τον ένα χώρο στον άλλο στην περίπτωση αυτή. Πρόκειται για ένα απεριοδικό σήμα x(t) το οποίο έχει συνεχή μετασχηματισμό Fourier.

.



Μετασχηματισμός Fourier απεριοδικού σήματος συνεχούς χρόνου.

β) Συνεχής Χρόνος και Διακριτή Συχνότητα : Πρόκειται για την γνωστή έννοια των σειρών Fourier. Στην περίπτωση περιοδικής συνάρτησης συνεχούς χρόνου με περίοδο T το ζευγάρι μετασχηματισμού είναι:

$$X(m\Phi_s) = \frac{1}{T}\int_T \mathrm{x(t)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2p\,m\Phi_s t}\,dt$$

$$\mathrm{x(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X(m}\,\Phi_S)e^{j2p\,m\Phi_S t}$$

Το γεγονός ότι ένα σήμα συνεχούς χρόνου είναι τώρα περιοδικό έχει ως αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός Fourier να εξαναγκάζεται να γίνει ένα σήμα “διακριτής συχνότητα”.

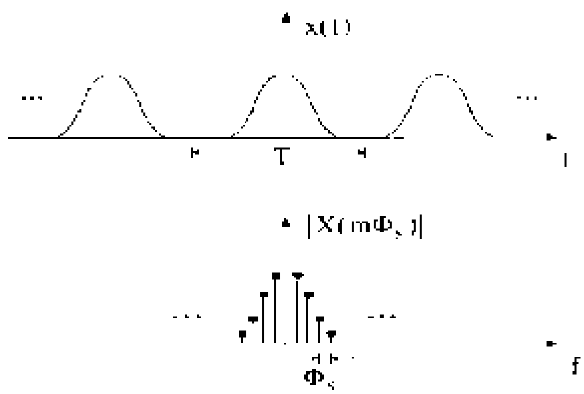
Αν στην συνεχεία δεν κάνουμε την υπόθεση του περιοδικού σήματος, στην περίπτωση που αρχίσουμε να δειγματοληπτούμε τον μετασχηματισμό η διαδικασία της δειγματοληψίας και μόνο αυτή θα οδηγήσει σύμφωνα με τα προηγούμενα σε περιοδική χρονική συνάρτηση.

Επομένως δεν έχει σημασία τη ήταν η αρχική χρονική συνάρτηση. Από την στιγμή που στον χώρο της συχνότητας έχουμε διακεκριμένες τιμές η αντιστροφή θα οδηγήσει σε περιοδικό σήμα στον χώρο του χρόνου. Θα ισχύει στην περίπτωση αυτή

$$\Phi_S = \frac{1}{T}$$

Επιγραμματικά μπορούμε να πούμε ότι :

Μια περιοδική συνάρτηση συνεχούς χρόνου οδηγεί σε μία απεριοδική συνάρτηση διακριτής συχνότητας



Σειρά Fourier ανάπτυξης περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου

Το σχήμα απεικονίζει αυτό τον μετασχηματισμό.

γ) Διακριτός Χρόνος και Συνεχής Συχνότητα : Σχετίζεται με τον μετασχηματισμό Z όταν αυτός υπολογιστεί πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

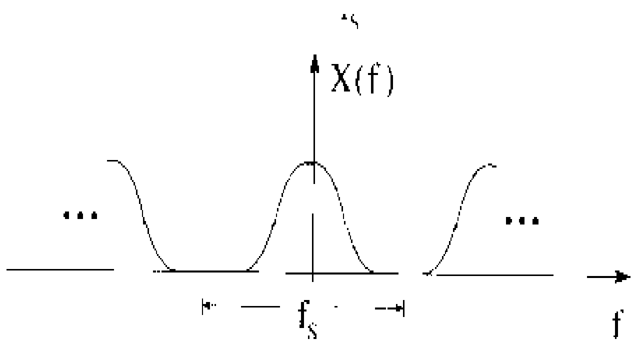
Το ζευγάρι μετασχηματισμού δίνεται στην περίπτωση αυτή από τις εξής σχέσείς :

$$X(f) = \sum_{n} \mathrm{x}(\mathrm{nT_S}) e^{-j2p\, nfT_S}$$

$$\mathrm{x}(\mathrm{nT}_S) = \frac{1}{f_S} \int_{f_S} X(f) e^{j2p\, nfT_S}\, dt$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση X(f) είναι περιοδική. Το προηγούμενο ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε μία μόνο περίοδο της X(f).

Στο σχήμα απεικονίζεται η συνάρτηση διακριτού χρόνου ή οποία έχει ως μετασχηματισμό στον χώρο της συχνότητας μια περιοδική συνάρτηση συνεχούς συχνότητας. Αξίζει να παρατηρηθεί ο δυϊσμός που υπάρχει συγκρίνοντας με την προηγούμενη περίπτωση.



Μετασχηματισμός Fourier σήματος διακριτού χρόνου.

Επομένως η δειγματοληψία στον χώρο του χρόνου δημιουργεί περιοδικότητα στην περιοχή της συχνότητας. Επίσης αν υπάρχει περιοδικότητα στην περιοχή της συχνότητας , το αντίστοιχο χρονικό σήμα θα είναι διακριτού χρόνου.

Θα ισχύει η εξής σχέση της περιόδου δειγματοληψίας και της περιόδου της συνάρτησης X(f)

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

Μία απεριοδική συνάρτηση διακριτού χρόνου οδηγεί σε μία περιοδική συνάρτηση συνεχούς συχνότητας

Ο DTFT γράφεται και ως εξής:

$$X(f) = \sum_{n} \mathrm{x(nT_S)} e^{-j2p\, nfT_S} = \sum_{n} \mathrm{x(nT_S)} e^{-j2p\, nF} = \sum_{n} \mathrm{x(n)} e^{-j\Omega n} = \mathrm{X}(e^{j\Omega})$$

Και οι τρεις περιπτώσεις μετασχηματισμών που εξετάσαμε έχουν περιορισμένο πρακτικό ενδιαφέρον εφόσον τουλάχιστον ένας από τους δύο χώρους είναι συνεχούς μεταβλητής και επομένως δεν προσφέρεται στους υπολογισμούς Η/Υ. Πρέπει άρα να εισαχθεί ένας τέταρτος μετασχηματισμός διακριτού χρόνου και διακριτής συχνότητας.

δ) Διακριτός Χρόνος και Διακριτή Συχνότητα : Έστω $x(nT_S)$ το σήμα διακριτού χρόνου και $X(m\Phi_S)$ ο μετασχηματισμός διακριτής συχνότητας. Το εξής ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier μπορεί να οριστεί :

$$X(m\Phi_S) = \sum_{n} \mathrm{x(nT_S)} e^{-j2p\, mn\Phi_S T_S}$$
$$\mathrm{x(nT}_S) = \frac{1}{N} \sum_{n} X(m\Phi_S) e^{j2p\, mn\Phi_S T_S}$$

Το προηγούμενο ζευγάρι είναι μία από τις μορφές που μπορεί να πάρει ο λεγόμενος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΔΜΦ)- Discrete Fourier Transform (DFT) και ο Αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (ΑΔΜΦ)-Inverse DFT (IDFT).

Το διακριτό και στους δύο χώρους – χρόνο και συχνότητα – σημαίνει κατ΄ανάγκη περιοδικότητα και στους χώρους, η οποία άλλωστε μπορεί να διαπιστωθεί με απλή παρατήρηση των σχέσεων ορισμού. Ας σημειωθεί ότι τα παραπάνω αθροίσματα υπολογίζονται πάνω σε μία περίοδο των σημάτων διακριτού χρόνου ή διακριτής συχνότητας αντιστοίχως. Σε σήματα πεπερασμένης διάρκειας στα οποία αναφέρεται το ζευγάρι η περιοδικότητα μπορεί να νοηθεί απλά με την επανάληψη του σήματος.

Αλλά

$T=NT_s$ και $T=1/\Phi_s$ --> $\Phi_s T_s= 1/N$

Αρα

$$X(m\Phi_S) = \sum_{n} \mathrm{x(nT_S)} e^{-j2p\, mn\Phi_S T_S} = \sum_{n} \mathrm{x(nT_S)} e^{-j2p\, mn/N} = \sum_{n} \mathrm{x(n)} e^{-j2p\, mn/N} = X[m]$$

m, n = 0, …, N-1.

Ο DFT προκύπτει από δειγματοληψία (N σημείων) του DTFT στο πεδίο της συχνότητας

$$X[k] = X(e^{j\Omega})|_{\Omega = 2p\,k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2p\,kn/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Ας δούμε:

k = 0 **à** Ω = 0
k = 1 **à** Ω = 2π/N
k = 2 **à** Ω = 2*2π/N
.
.
.
k = N/2 **à** Ω = π (μέγιστη συχνότητα $e^{j\Omega n} = e^{jp\,n} = (-1)^n$)
.
.
.
k = N-2 **à** Ω = 2π - 2*2π/N
k = N-1 **à** Ω = 2π – 2π/N

Αρα το |H[k]| δείχνει το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος:

- Αν οι τιμές του είναι σημαντικές, για k κοντά στο 0 ή στο N, το σήμα μεταβάλλεται αργά (σχεδόν σταθερή ένταση)
- Αν οι τιμές του είναι διάφορες του μηδενός, για k κοντά στο N/2, το σήμα μεταβάλλεται γρήγορα (άρα περιέχει σημαντική πληροφορία)

Αν θέσουμε

$$W_N = e^{-j2p/N}$$

τότε

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \quad , \qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

και

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}$$

Υπολογισμός DTFT από DFT:

$$X(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jwn}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}\right]e^{-jwn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2p\,kn/N}e^{-jwn}$$

Ομως

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(w-2pk/N)n} = \frac{1-e^{-j(wN-2pk)}}{1-e^{-j[w-2pk/N)]}}$$

$$= \frac{e^{-j[(wN-2pk)/2]}}{e^{-j[(wN-2pk)/2N]}} \cdot \frac{\sin(\frac{wN-2pk}{2})}{\sin(\frac{wN-2pk}{2N})}$$

$$= \frac{\sin(\frac{wN-2pk}{2})}{\sin(\frac{wN-2pk}{2N})} \cdot e^{-j[w-(2pk/N)][(N-1)/2]}$$

Αρα

Ο DTFT μπορεί να υπολογιστεί από τον DFT ως εξής:

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \frac{\sin(\frac{wN-2pk}{2})}{\sin(\frac{wN-2pk}{2N})} \cdot e^{-j[w-(2pk/N)][(N-1)/2]}$$

Παραδείγματα

1.Υπολογίστε τον ΔΜΦ του σήματος $x(n)=e^{jnl2\pi/N}$, όπου $0\leq n\leq N-1$ και l ένας ακέραιος στο ίδιο διάστημα. Χαράξτε το αποτέλεσμα για l=7 και N=16. Υπολογίστε επίσης τον ΔΜΦ του σηματος $x(n)=e^{jn\lambda 2\pi/N}$ για $\lambda\neq$ακεραίου.

Υπόδειξη : Χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα :

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} = a^{\frac{N-1}{2}} \left\{ \frac{a^{\frac{N}{2}} - a^{-\frac{N}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \right\}$$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον ορισμο του ΔΜΦ θα έχουμε :

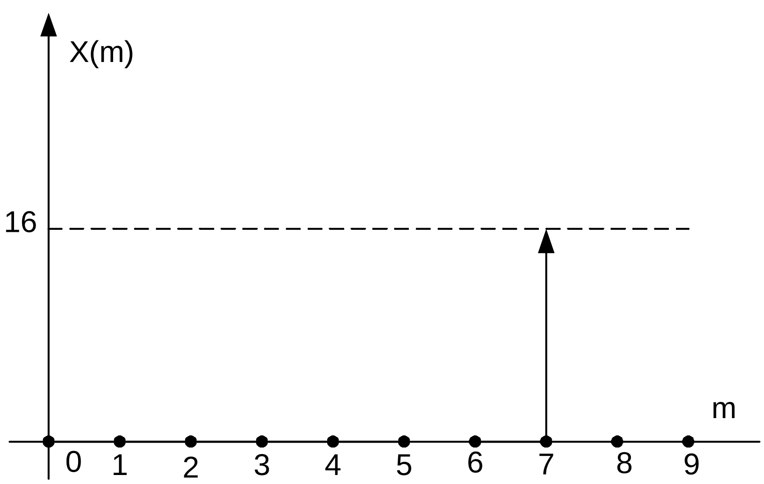
$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jnl2p/\mathrm{N}} e^{-j2pmn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2p\frac{n(l-m)}{N}}$$

Στην περίπτωση του l = m από την προηγούμενη σχέση προκύπτει X(m)=N. Για l≠m, έχουμε :

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w^{n(l-m)} = \frac{1-w^{(l-m)N}}{1-w^{(l-m)}} = \frac{1-e^{-j2p(l-m)}}{1-e^{-j\frac{2p}{\mathrm{N}}(l-m)}} = 0$$

διότι $e^{-j2\pi(l-m)}=1$

Για l=7 και N=16, θα έχουμε σύμφωνα με τα προηγούμενα X(7)=16 και X(m)=0 για m≠7 οπότε προκύπτει το επομένο διάγραμμα.



2) Εστω

$$x(n)=\begin{cases}\cos(2p\,n/N),\ n=0,1,2,...,N-1\\ 0\ ,\ a\,l\,l\,o\,u\end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον ΔΜΦ

$$X(m)=\mathsf{F}_{\Delta\mathrm{M}\Phi}\left\{x(n)\right\}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cdot e^{-j\frac{2p\,n\cdot m}{N}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(e^{+j\frac{2p\,n}{N}}+e^{-j\frac{2p\,n}{N}})\cdot e^{-j\frac{2p\,n\cdot m}{N}}$$

$$\Rightarrow X(m)=\frac{1}{2}(\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\frac{2p\,n}{N}(m-1)}}_{N\cdot d\,(m-1)}+\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}(e^{-j\frac{2p\,n}{N}(m+1)}}_{N\cdot d\,(m+1)})$$

Ε*poménwV* :

$$X(m)=(N/2)\cdot[d\,(m-1)+d\,(m+1)]=(N/2)\cdot[d\,(m-1)+d\,(m-N+1)]$$

Υπολογισμός του ΑΔΜΦ

$$x(n)=\mathsf{F}^{-1}_{\mathrm{A}\Delta\mathrm{M}\Phi}[X(m)]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(m)\cdot e^{+j\frac{2p\,n\cdot m}{N}}\Rightarrow$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\cdot\frac{N}{2}\sum_{m=0}^{N-1}[d\,(m-1)+d\,(m-N+1)]\cdot e^{+j\frac{2p\,n\cdot m}{N}}=$$

$$\frac{1}{2}[\sum_{m=0}^{N-1}d\,(m-1)\cdot e^{+j\frac{2p\,n\cdot m}{N}}+\sum_{m=0}^{N-1}d\,(m-N+1)\cdot e^{+j\frac{2p\,n\cdot m}{N}}]=\frac{1}{2}[e^{j\frac{2p\,n}{N}}+e^{-j\frac{2p\,n}{N}}\cdot\underbrace{e^{j\frac{2p\,Nn}{N}}}_{1}]\Rightarrow$$

$$x(n)=\frac{1}{2}[e^{j\frac{2p\,n}{N}}+e^{-j\frac{2p\,n}{N}}]=\cos(\frac{2p\,n}{N})$$

$gia\quad n=0,1,2,...,N-1.$