ΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ FOURIER

$x(t+kT) = x(t)$

$T = 2\pi/\omega_0$

$f_0 = 1/T$

$$x(t) = \sum_{m=-8}^{\infty} c_m\, e^{jmw_0 t}$$

$$c_m = \frac{1}{2}(a_m - jb_m)$$

Το βασικό πρόβλημα στις σειρές Fourier είναι ο υπολογισμός των συντελεστών c_m. Αυτός γίνεται κατορθωτός αν λάβουμε υπόψη ότι οι συναρτήσεις βάση είναι ορθογώνιες

Δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\int e^{j(m-l)w_0 t}\, dt = \begin{cases} T, gia & m = 1 \\ 0, gia & m \neq 1 \end{cases}$$

Με χρήση αυτής είναι δυνατό να αποδειχθεί ότι:

$$C_m = \frac{1}{T}\int x(t)\, e^{-jmw_0 t}\, dt$$ μιγαδικοί αριθμοί

Σειρές Fourier με ημίτονα και συνημίτονα

Ένα περιοδικό σήμα, κάτω από προϋποθέσεις οι οποίες συνδέονται με την σύγκλιση των σειρών να γραφεί υπό τη μορφή:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m w_0\, t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m w_0\, t)$$

Ενδιαφέρον έχει να προσπαθήσει κανείς να υπολογίσει του όρους a_m και b_m του αναπτύγματος με $\cos(l w_0 t)$ και ολοκλήρωση σε μία περίοδο (Τ) :

$$x(t)\cos(lw\, t)\,dt = \int_T \frac{a_0}{2}\cos(l w_0\, t)\,dt + \int_T \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m w_0\, t)\cos(l w_0\, t)\,dt + \int_T \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m w_0\, t)\cos(l w_0\, t)\,dt$$

Στην συνέχεια πρέπει να χρησιμοποιηθούν σχέσεις ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin(mx)$ και $\cos(mx)$. Υπάρχει ποικιλία τέτοιων σχέσεων όπως π.χ.

$$\int_T \sin(m w_0 t)\sin(l w_0\, t)\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \dfrac{T}{2}, & m = l \end{cases}$$

$$\int_T \cos(m w_0 t)\cos(l w_0\, t)\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \dfrac{T}{2}, & m = l \end{cases}$$

$$\int_T \sin(m w_0\, t)\cos(l w_0 t)\,dt = 0$$

Αν ληφθούν υπόψη οι σχέσεις ορθογωνιότητας προκύπτει:

$$a_m = \frac{2}{T}\int x(t)\cos(m w_0)dt$$

$$b_m = \frac{2}{T}\int x(t)\sin(m w_0\, t)\,dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$

Σειρές Fourier μόνο με συνημίτονα

Πρόκειται για μία παραλλαγή του αναπτύγματος που εξετάστηκε προηγούμενα.. Το σήμα συνεχούς χρόνου x(t) αναπτύσσεται στην εξής σειρά:

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{A}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m w_o t + \Phi_m)$$

Παρατηρεί κανείς την εμφάνιση μιας γωνίας φάσης αντί του ημιτονικού όρου. Με βάση γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\mathrm{A}_0 = \frac{\mathrm{a}_0}{2}$$

$$\mathrm{A}_\mathrm{m} = \sqrt{\mathrm{a}_\mathrm{m}^2 + \mathrm{b}_\mathrm{m}^2}$$

$$\tan \Phi_m = -\frac{\mathrm{b}_\mathrm{m}}{\mathrm{a}_\mathrm{m}}$$

Μιγαδική μορφή των σειρών Fourier

$$\mathrm{x(t)} = \sum_{m=-8}^{\infty} \mathrm{c}_\mathrm{m}\, e^{j m w_0 t}$$

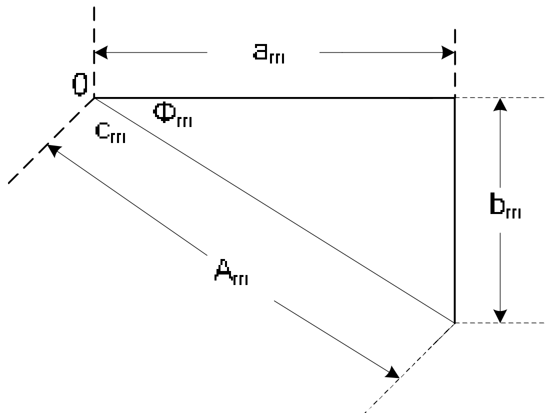
$$\mathrm{c}_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}_\mathrm{m} - \mathrm{j}\mathrm{b}_\mathrm{m})$$

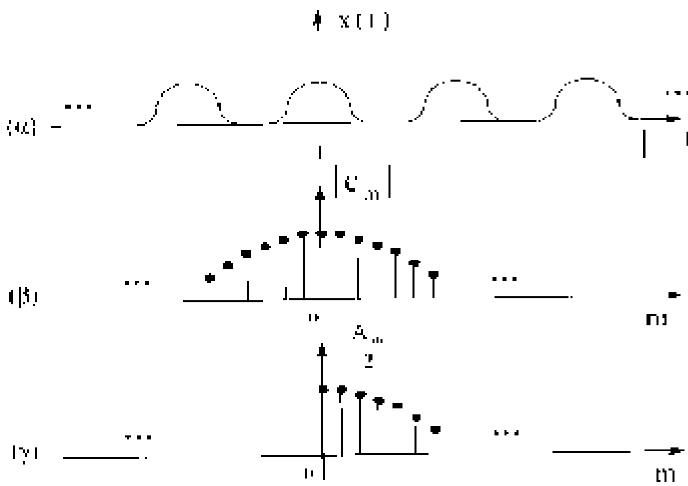
Για πραγματικά σήματα x(t) μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα ότι:

$$\mathrm{c}_{-\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\mathrm{a}_\mathrm{m} + \mathrm{j}\mathrm{b}_\mathrm{m}) = \mathrm{c}_m^*$$

Φυσικά για πραγματικά σήματα τόσο το a_m όσο και τα b_m είναι πραγματικά

$$A_m = 2|c_m|, \qquad m \neq 0$$
$$A_0 = c_0, \qquad m = 0$$





Φάσμα πλάτους
|cm|

Φm
Φάσμα Φάσης

Διπλευρικό και Μονοπλευρικό φάσμα περιοδικού σήματος

Γραμμωτά Φάσματα

Σειρές Fourier σημάτων με συμμετρίες και συμμετρίες σειρών Fourier

Σε πολλές περιπτώσεις στην πράξη τα περιοδικά σήματα είναι άρτιες συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$x(t) = x(-t)$$

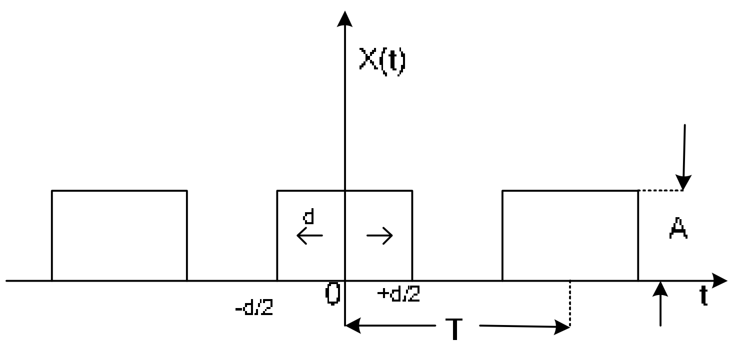
Τότε μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι:

$$b_m = 0 \quad kai \quad a_m = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(m w_0 t)dt$$

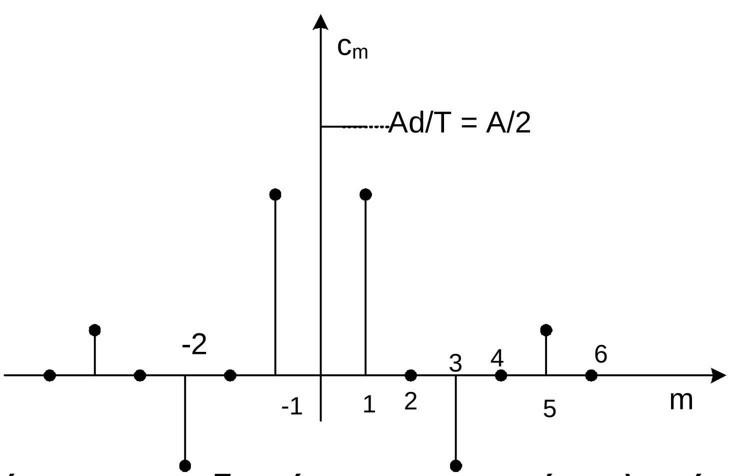
Επίσης αποδεικνύεται ότι για άρτια σήματα:

$$c_m \in R \quad kai \quad A_m = a_m = 2|c_m|$$

Τα άρτια σήματα αντιστοιχούν σε $\Phi_m = 0$.



Άρτιο σήμα: ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός διάρκειας d, πλάτος A.



$$c_m = \frac{Ad}{T} \cdot \frac{\sin[\frac{p w_0 d}{2}]}{[\frac{p w_0 d}{2}]}$$

Φάσμα πλάτους περιοδικού τετραγωνικού παλμού με “duty cycle’’1/2 .

Περιττά Σήματα:

$$x(t) = -x(-t)$$

Με χρήση των σχέσεων ορισμού καταλήγει κανείς στο εξής αποτέλεσμα:

$$a_m = 0$$

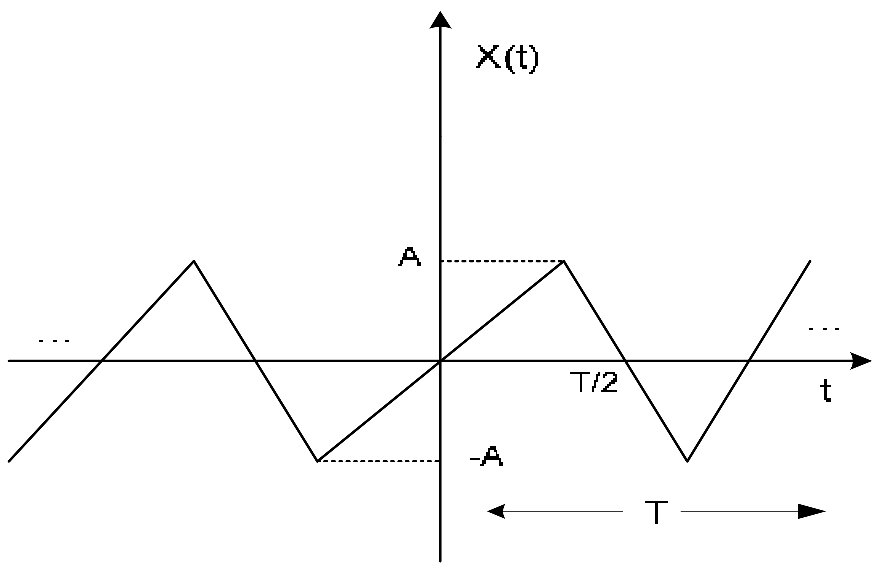
$$A_m = b_m = 2|c_m|$$

$$c_m = -\frac{1}{2} j b_m$$

$$\Phi_m = -90^0$$

$$b_m = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(m w_0 t)\, dt$$

Ενα παράδειγμα περιττής συνάρτησης δίνεται στο σχήμα



$$A_m = \frac{4A}{T} \frac{\sin \frac{mp}{2}}{(\frac{mp}{2})^2}$$

$$A_0 = 0$$

Το $|c_m|$ είναι άρτια συνάρτηση του m, ενώ το Φ_m είναι περιττή συνάρτηση του m.

Συμπίεση Αριθμού Γεννητριών Περιοδικών Σηματών

$$\tilde{x}(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{M} A_m \cos(m w_0 t + \Phi_m)$$

$$\overline{E} = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)\,dt$$

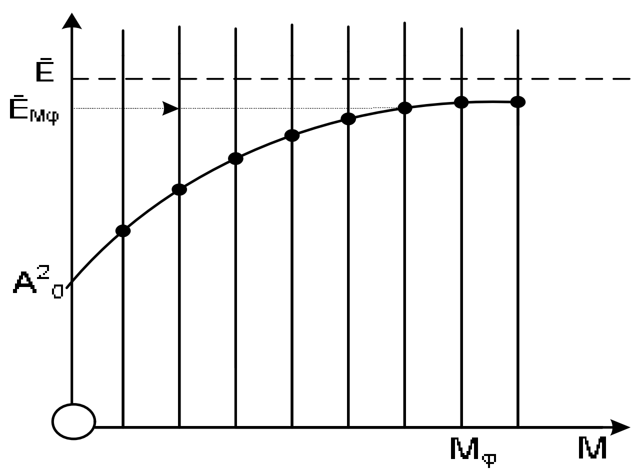
Την προηγούμενη σχέση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

$$\bar{E}_M = \frac{1}{T}\int \tilde{x}^2(t)\,dt$$

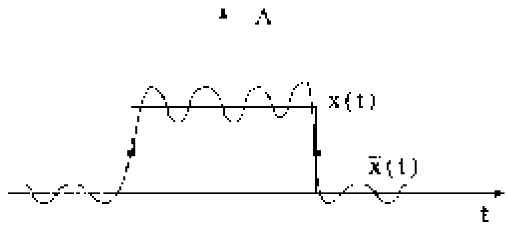
Με χρήση της και των βασικών σχέσεων ορθογωνιότητας στην

$$\bar{E}_m = A_0^2 + \sum_{m=1}^{m} \frac{A_m^2}{2}$$

Προφανώς $\overline{E} > \bar{E}_m$, ∀M≠∞



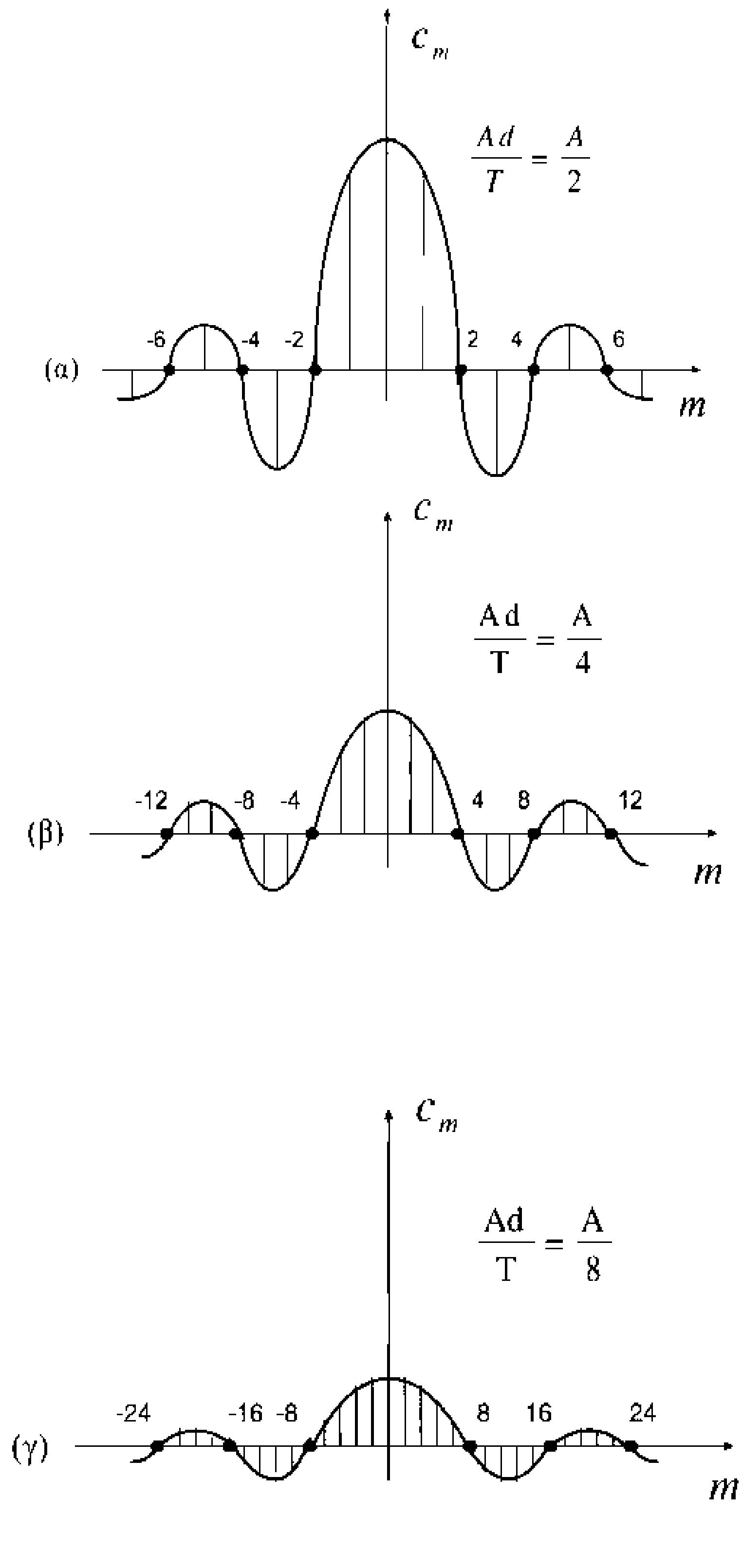
Επιλογή της φειδωλής τιμής του M, M_φ, βάση την μέση ενέργεια.



Τετραγωνική μορφή και προσέγγιση σε μικρό αριθμό γεννητριών

Το Θεώρημα του Parseval : Για M→∞

$$\overline{E} = A_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m^2}{2} = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$$



Φάσματα τετραγωνικών παλμών για (α) T_1=2d, T_2=4d, T_3 =8d

Μετασχηματισμός Fourier Αναλογικών Σημάτων

Ο γενικός όρος της σειράς Fourier δίνεται από την σχέση

$$c_m = \frac{1}{T}\int \mathrm{x(t)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m w_0 t} dt$$

Στην περίπτωση μη περιοδικών σημάτων Τ→∞ και παρατηρουμε αμέσως ότι $c_m \to 0$, επομένως οι σειρές Fourier δεν είναι το κατάλληλο εργαλείο για την περιγραφή μη περιοδικών σημάτων στον χώρο της συχνότητας.

Στην περίπτωση μη περιοδικών σημάτων Τ→∞ το γραμμωτό φάσμα δεν έχει πλέον νόημα. Θα έχουμε να κάνουμε με ένα **συνεχές φάσμα** και θα υπάρχουν άπειρες συχνότητες μεταξύ δύο συχνοτήτων. Η απόσταση μεταξύ δύο συχνοτήτων ήταν στην περίπτωση του τετραγωνικού περιοδικού παλμού:

$$\Delta w = \frac{2p}{\mathrm{T}}$$

Στην περίπτωση Τ→∞ (ένας μόνο παλμός) τόσο το $c_m \to 0$ όσο και το Δω→0. Το μέγεθος που ίσως τώρα έχει νόημα έιναι το $\left(\frac{c_m}{\Delta f}\right)$ που πιθανόν να παραμείνει διάφορο του μηδενός και αντιστοιχεί σε μία πυκνότητα πλάτους ανά μονάδα συχνότητας:

$$\frac{c_m}{\Delta f} = c_m T = \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{x(t)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m w_0 t} dt$$

Στο όριο θα έχουμε : $\lim\limits_{T\to\infty}(c_m T) = \lim\limits_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \mathrm{x}(t) e^{-jmw_0} dt$

Αλλά: $m w_0 = m\frac{2p}{\mathrm{T}} = m\Delta w$ και $\lim\limits_{T\to\infty}(m w_0) = w.$

Επομένως:

$$\lim_{T\to\infty}(c_m T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)}\,\mathrm{e}^{-jwt} dt$$

Η συνάρτηση (σήμα) ¨

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt} dt$$

Μπορεί να ονομαστεί **πυκνότητα φάσματος**

Επομένως το ζευγάρι μετασχηματισμού Fourier είναι το εξής:

$\mathrm{x(t)} = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X}(w)\cdot e^{jwt} dw$	Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier
$\mathrm{X}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x(t)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wt} dt$	Μετασχηματισμός Fourier

Βασικές Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Fourier

Με την υπόθεση της ύπαρξης του ζευγαρίου x(t)↔X(ω) ο πίνακας συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες.

1. Γραμμικότητα:	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \leftrightarrow a_1 X(w) + a_2 X_2(w)$
2. Χρονική Κλιμάκωση:	$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{\lvert a \rvert} X(\frac{w}{a})$
3. Συμμετρία μεταξύ των χώρων ορισμού:	$X(t) \leftrightarrow 2px(-w)$
4.Χρονική Μετάθεση:	$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-jwt_0} X(w)$
5.Μετάθεση Συχνότητας: Διαμόρφωση:	$e^{jwt_0} x(t) \leftrightarrow X(w - w_0)$ $x(t) \cos w_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(w - w_0) + X(w + w_0)]$
6.Παραγώγιση:	$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (jw)^n X(w)$
7.Συνέλιξη:	$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(w) X_2(w)$ $x_1(t) x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2p} X_1(w) * X_2(w)$

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος

Ο μετ/σμος Fourier ενός σταθερού σήματος x(t)=K, ∀t, μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας ένα παράγοντα σύγκλισης:

$$\mathrm{X}(w)=\mathrm{F}\{\mathrm{x(t)}\}=\mathrm{F}\left\{\lim_{\mathrm{a}\to 0}(e^{-\mathrm{a}|\mathrm{t}|}\cdot K)\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\mathrm{a}\to 0}(e^{-\mathrm{a}|\mathrm{t}|}\cdot K)\cdot e^{-jwt}dt=\lim_{\mathrm{a}\to 0}K\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mathrm{a}|\mathrm{t}|}\cdot e^{-jwt}dt=$$

$$=\lim_{\mathrm{a}\to 0}K\cdot[\int_{-\infty}^{0^-}e^{(\mathrm{a}-jw)t}dt+\int_{o^+}^{+\infty}e^{-(\mathrm{a}+jw)t}dt]=\lim_{\mathrm{a}\to 0}K\cdot[\left.\frac{e^{(\mathrm{a}-\mathrm{j}w)t}}{\mathrm{a}-\mathrm{j}w}\right|_{-\infty}^{0^-}-\left.\frac{e^{-(\mathrm{a}+jw)t}}{(\mathrm{a}+jw)}\right|_{0^+}^{+\infty}]$$

$$=\lim_{\mathrm{a}\to 0}K\cdot[\frac{1}{\mathrm{a}-\mathrm{j}w}+\frac{1}{\mathrm{a}+jw}]=\lim_{\mathrm{a}\to 0}(\frac{2\mathrm{aK}}{\mathrm{a}^2+w^2})$$

$$\mathrm{X}(w)=0,w\neq 0$$

$$\mathrm{X}(w)=\frac{0}{0},w=0$$

Για την άρση της αοριστίας μπορεί να γίνει εφαρμογή του κανόνα L΄Hospital οπότε:

$$\lim_{\substack{\mathrm{a}\to 0\\ w=0}}(\frac{2\mathrm{aK}}{\mathrm{a}^2+w^2})=\lim_{\mathrm{a}\to 0}(\frac{2K}{2\mathrm{a}})=\infty$$

Επομένως η τιμή του μετασχηματισμού Fourier απειρίζεται στην μηδενική συχνότητα. Παράλληλα όμως παρατηρούμε ότι η επιφάνεια Ε κάτω από την συνάρτηση $\frac{2\mathrm{aK}}{\mathrm{a}^2+w^2}$ παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη του α.

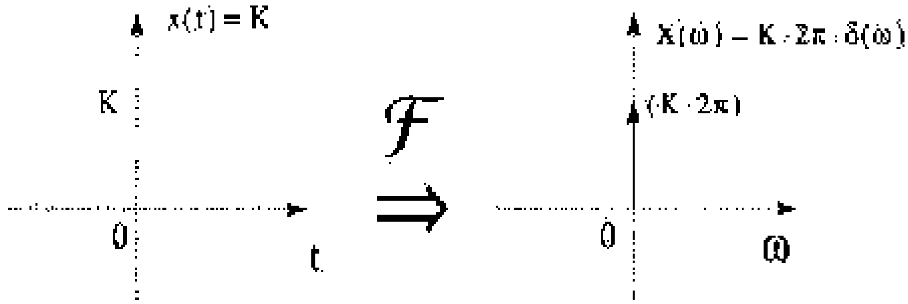
$$\mathrm{E}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\mathrm{a}K}{\mathrm{a}^2+w^2}dw=2\mathrm{K}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+w^2}dw=2\mathrm{K}\cdot\tan^{-1}(\frac{w}{\mathrm{a}})\Big|_{-\infty}^{+\infty}=2K(\frac{p}{2}-(-\frac{p}{2}))=2\mathrm{K}\cdot p=K\cdot(2p)$$

που αντιστοιχεί στον κρουστικό παλμό (συνάρτηση δέλτα) στην αρχή των αξόνων(ω=0) με “μέγεθος” Κ · 2π.

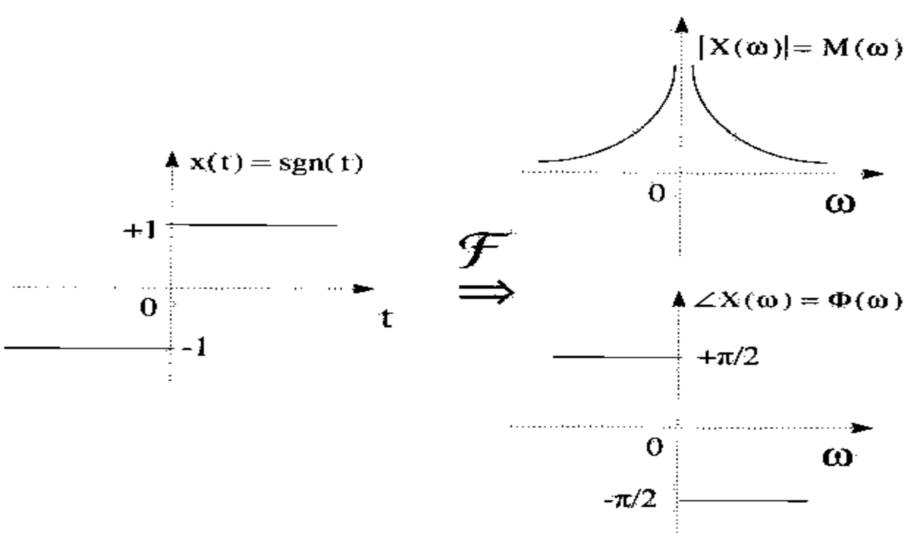
$$F\{x(t)\}=F\{K\}=X(w)=2p\cdot \mathrm{K}\cdot d(w)=\mathrm{K}\cdot d(f)$$

διότι $d\,(\mathrm{a}t)=\dfrac{1}{|\mathrm{a}|}d\,(t)$,

επομενως: $d\,(w)=d\,(2p\;\;f)=\dfrac{1}{2p}d\,(f)$.



Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε τη συνάρτηση προσήμου (**à** 2/jω)



Μετασχηματισμοί Fourier ημιτονοειδών σημάτων

Γενικά ισχύει:

$$d(\mathrm{a}t) = \frac{1}{|\mathrm{a}|} d(t),$$

Επομένως:

$$d(w) = d(2p\ f) = \frac{1}{2p} d(f).$$

Και

$$d(\mathrm{a}t - t_0) = \frac{1}{|\mathrm{a}|} d(t - \frac{t_0}{\mathrm{a}})$$

Οπότε

$$\cos(w_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t})$$

$$F\left\{\cos(w_0 t)\right\} = \frac{1}{2} F\left\{e^{jw_0 t}\right\} + \frac{1}{2} F\left\{e^{-jw_0 t}\right\}$$

αλλά :

$$F\left\{e^{jw_0 t}\right\} = F\left\{e^{jw_0 t} \cdot 1\right\} = 2p \cdot d(w - w_0)$$

διότι λόγω της γνωστής ιδιότητας της διαμόρφωσης του μετ/σμου Fourier ισχύει:

$$\mathrm{x}(t) \xrightarrow{F} X(w) \Rightarrow e^{jw_0 t} \cdot \mathrm{x(t)} \xrightarrow{F} X(w - w_0)$$

Τελικά:

$$F\left\{\cos(w_0 t)\right\} = \frac{1}{2} F\left\{e^{jw_0 t}\right\} + \frac{1}{2} F\left\{e^{-jw_0 t}\right\} = \frac{1}{2}[2pd(w - w_0) + 2pd(w + w_0)]$$

Αρα

$$F\left\{\cos(w_0 t\right\} = p\,[d\,(w-w_0)+d\,(w+w_0)] = \frac{1}{2}[d\,(f-f_0)+d\,(f+f_0)]$$

Ομοίως:

$$F\left\{\sin(w_0 t\right\} = \frac{p}{j}[d\,(w-w_0)-d\,(w+w_0)] = \frac{1}{2j}[d\,(f-f_0)-d\,(f+f_0)]$$

Ενώ για το βηματικό παλμό:

$$F\left\{u(t)\right\} = F\left\{\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)}_{u(t)}\right\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\}+F\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)\right\} = p\cdot d\,(w)+\frac{1}{jw} = \frac{1}{2}d\,(f)+\frac{1}{j2p\,f}$$

Διαμόρφωση κατά πλάτος

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{A}\left[1+m(t)\right]\cos(2p\,f_0 t)$$

όπου m(t) είναι το διαμορφώνον σήμα

με $|m(t)|\leq 1$ και f_0 είναι η συχνότητα του φέροντος σήματος (σε τιμή αρκετά υψηλότερη από τις συχνότητες του διαμορφώνοντος σήματος).

το γινόμενο στον χρόνο είναι συνέλιξη στην συχνότητα ως εξής:

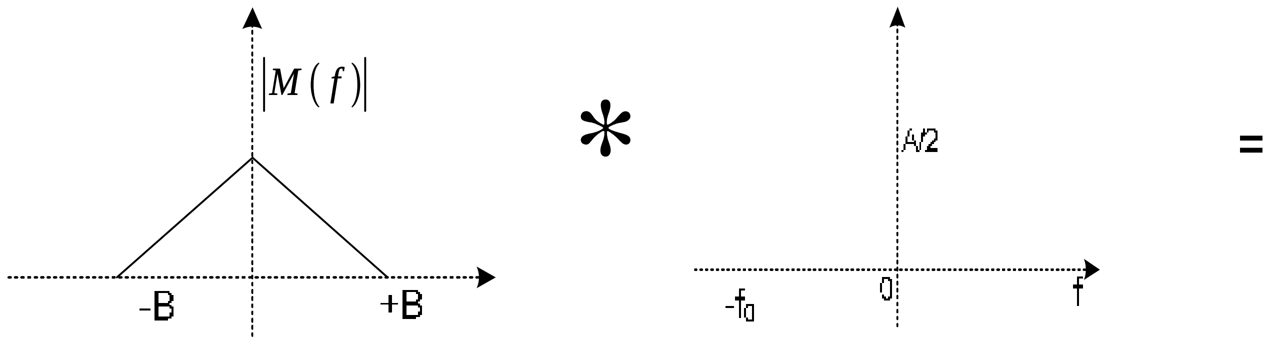
$$X(f) = F\left\{\mathrm{x(t)}\right\} = F\left\{A[1+m(t)]\cos(2p\,f_0 t\right\} = A\cdot F\{1+m(t)\} * F\{\cos(2p\,f_0 t)\} =$$

$$= A[d\,(f)+M(f)] * \frac{1}{2}[d\,(f+f_0)+d\,(f-f_0)] =$$

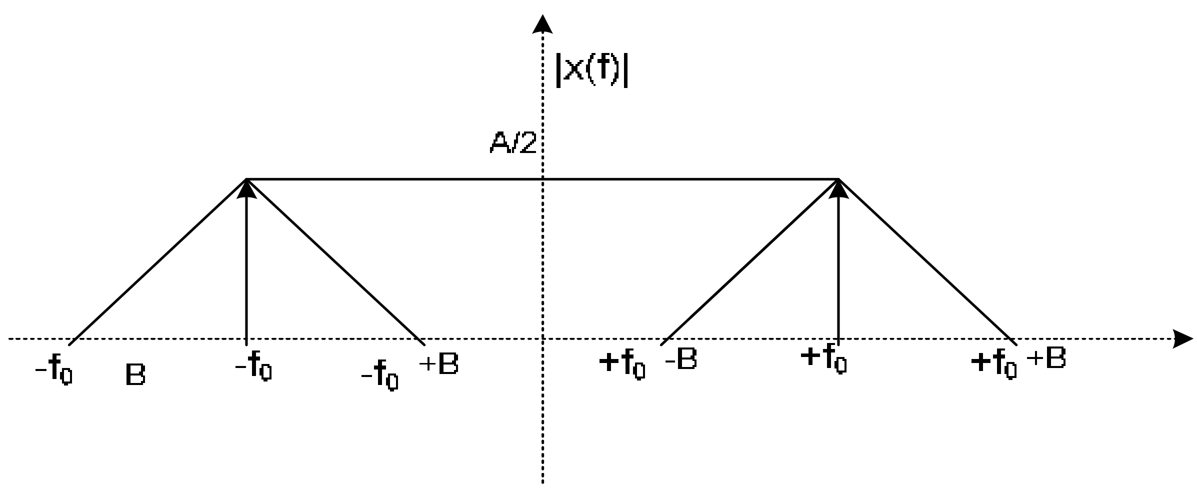
$$= \frac{A}{2}[d\,(f+f_0)+d\,(f-f_0)]+\frac{\mathrm{A}}{2}[\mathrm{M}(f+f_0)+M(f-f_0)]$$

(όπου M(f)=F{m(t)}).

Το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος x(t) αποτελείται από δύο «διακριτές συνιστώσες» στις συχνότητες του φέροντος $\pm f_0$ γύρω από την συχνότητα, όπως φαίνεται στο σχήμα

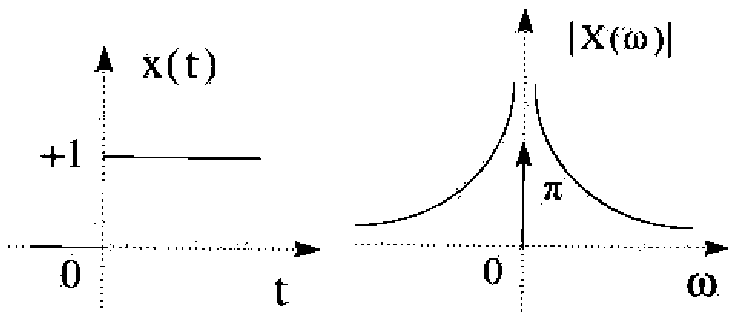


Φάσμα διαμορφούντος σήματος m(t)   Φάσμα φέροντος (carrier)



ΣΥΝΟΨΗ

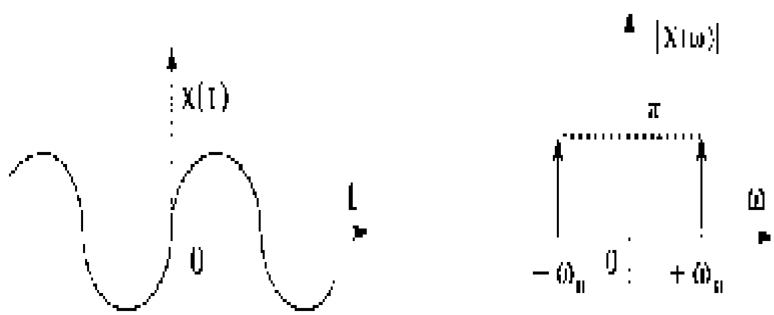
Αν x(t)=u(t), τότε $X(w)=pd(w)+\frac{1}{jw}$ ή $X(f)=\frac{1}{2}d(f)+\frac{1}{j2p\ f}$



Μετασχηματισμός Fourier βηματικής Συνάρτησης

Αν x(t)=sin(ω_0t), τότε : X(ω)=jπ[δ(ω+ω_0)-δ(ω-ω_0)]

ή $X(f)=\frac{j}{2}[d(f+f_0)-d(f-f_0)]$



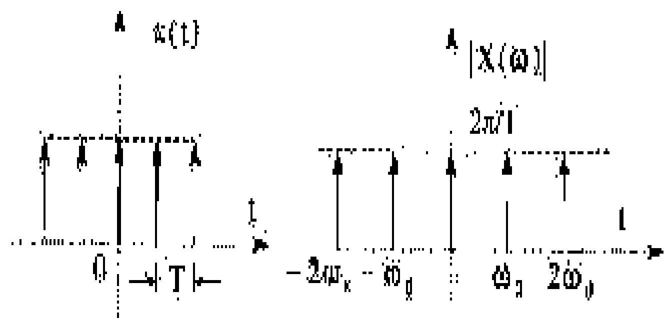
Μετασχηματισμός Fourier σήματος x(t)=sin(ω_0t).

Αν

$$\mathrm{x(t)} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{+\infty} d(t-nT),$$

τότε

$$\mathrm{x}(w) = \frac{2p}{\mathrm{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(w - n\frac{2p}{\mathrm{T}}) \quad \text{(ή} \quad X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(f - \frac{n}{\mathrm{T}}))$$



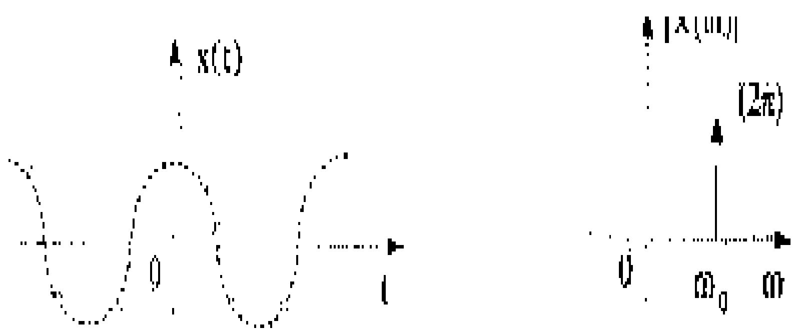
Μετασχηματισμός Fourier Σήματος $\mathrm{x(t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d(t-nT)$

Αν

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t},$$

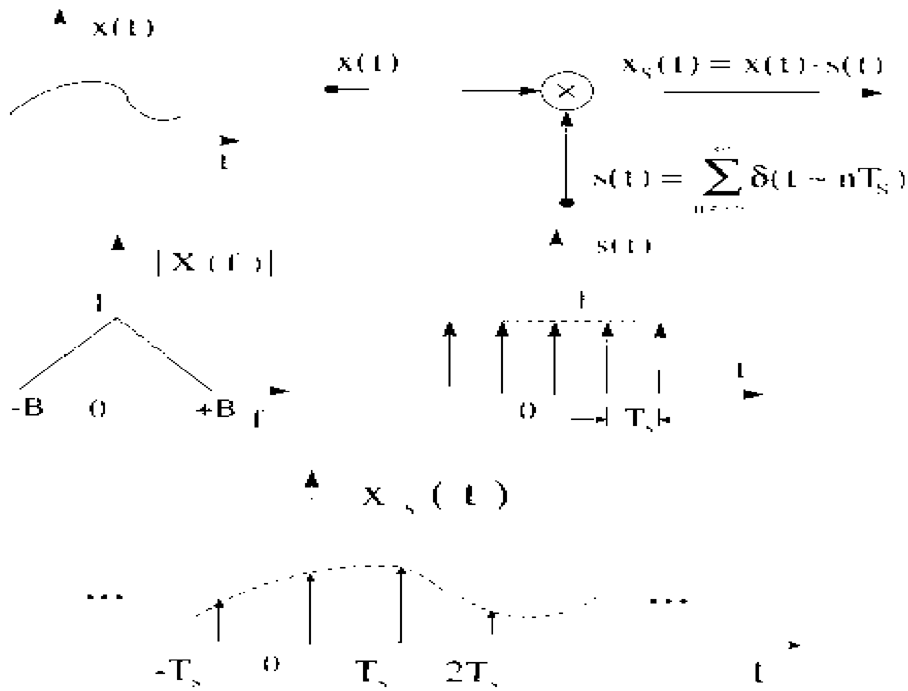
τότε:

$$X(w) = 2pd(w - w_0) \qquad (ή \qquad X(f) = d(f - f_0))$$



Μετασχηματισμός Fourier σήματος $\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}w_0 t}$

Το θεώρημα της Δειγματοληψίας



Έτσι θα έχουμε

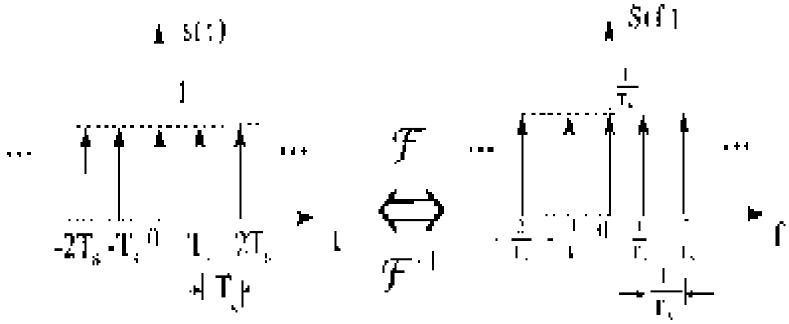
$$s(t) = \sum_{n-\infty}^{\infty} d\,(t - nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{+jmw_0 t}, \qquad w_0 = w_s = \tfrac{2p}{\mathrm{T}_s} = 2p\ f_s$$

όπου:

$$c_m = \frac{1}{T_s} \int_{<T_s>} s(t) \cdot e^{-jmw_0 t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} d\,(t) \cdot e^{-jmw_0 t} dt = \frac{1}{T_s}$$

Αρα :

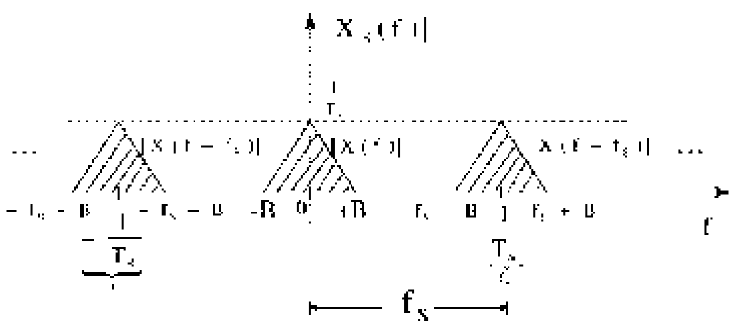
$$c_m = \frac{1}{T_s}, \qquad \forall m \in Z.$$

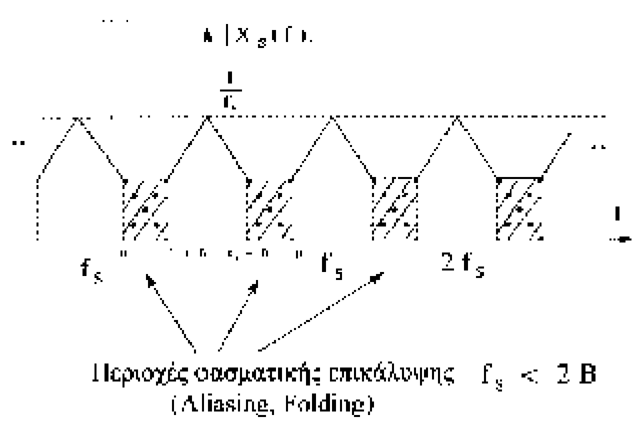


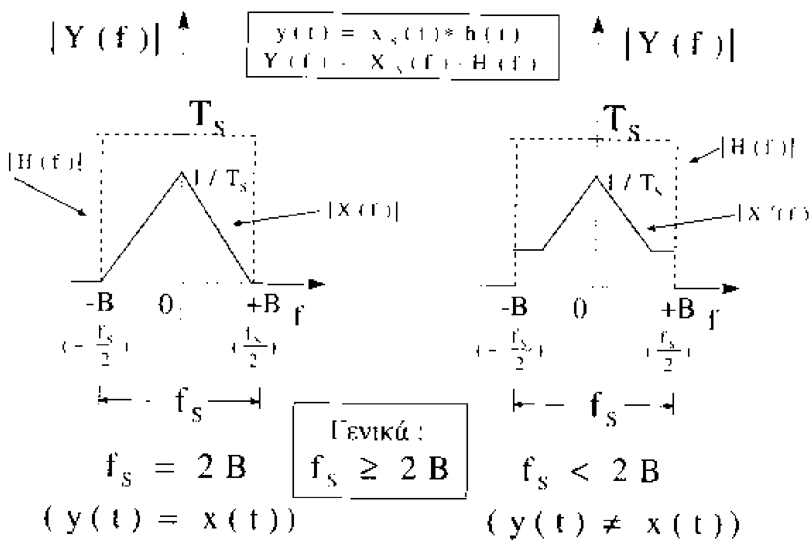
Αλλά ο κρουστικός παλμός είναι το ταυτοτικό στοιχείο της συνέλιξης:

$x(t) * \delta(t-t_o) = x(t-t_o)$

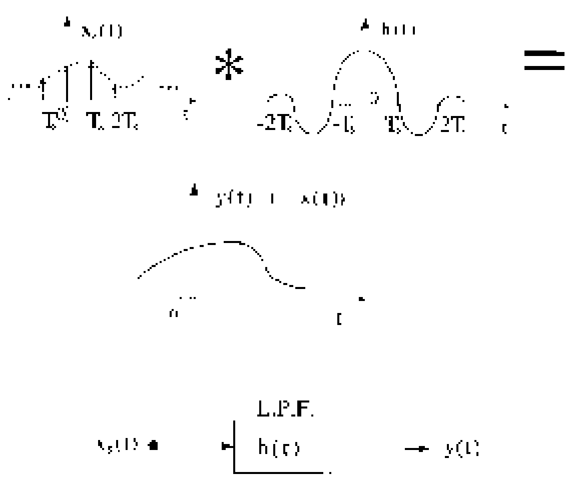
οπότε:







Χρήση βαθυπερατού φίλτρού σύμφωνα με το θεώρημα της Δειγματοληψίας



Ανακατασκευή του σήματος x(t) από τα δείγματα $x_s(t)$

Εφαρμογή ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου

$$H(f)=\begin{Bmatrix} T_s & |f|\le \frac{f_s}{2} \\ 0, & |f|>\frac{f_s}{2} \end{Bmatrix}$$

Επομένως, η κρουστική του απόκριση, $h(t)=F^{-1}\{H(f)\}$ θα δίνεται από την σχέση:

$$h(t)=F^{-1}\{H(f)\}=\sin c(p\,\frac{t}{T_s}),\qquad (t\in R)$$

σύμφωνα με την γνωστή ιδιότητα του μετ/σμου Fourier :

$$\mathrm{x(t)}\xrightarrow{F} X(f)\Rightarrow X(t)\xrightarrow{F}\mathrm{x(-f)}.$$

Επομένως, ή έξοδος του βαθυπερατού φίλτρου, y(t), θα προσδιορίζεται με την χρήση του συνελικτικού αθροίσματος ως εξής:

$$y(t)=\mathrm{x_s}(t)*h(t)=[\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}(nT_s)\cdot d(t-nT_s)}_{\mathrm{x_s}(t)}]*\sin c(p\,\frac{t}{T_s})=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{x(nT}_s)\cdot\sin c[\frac{p}{\mathrm{T}_s}(t-nT_s)]$$

Σε περίπτωση που έχουμε επιλέξει

$$T_s=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{2B},$$

τότε:

$$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{x}(\frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{B}})\cdot\sin c[2p\mathrm{B}\cdot(t-n\frac{1}{2B})],\qquad f_s=2B$$

Παρατήρηση : Σε περίπτωση που το προς δειγματοληψία σήμα x(t) είναι ζωνοπερατό (Band Pass) σήμα, δηλ. X(f)=0 για $|f|<B_1$ και $|f|<B_2$, τότε ότι η συχνότητα δειγματοληψιας f_s , μπορεί να είναι μικρότερη από $2B_2$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι τότε έχουμε : $2B \le f_s < 4B$, όπου $B=B_2-B_1$.