ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Ορισμός: Η συνέλιξη δύο σημάτων x(n) και h(n) είναι ένα τρίτο σήμα y(n) που ορίζεται ως

$$y(n) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{x(n)} * \mathrm{h(n)} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{h}(n-\mathrm{k})$$

$$y(n) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{x(n)} * \mathrm{h(n)} \underset{M\to\infty}{\stackrel{\Delta}{=}} \lim \frac{1}{(2M+1)} \sum_{k=-M}^{M} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{h(n-k)}$$

Το κάθε δείγμα του σήματος y(n) εξαρτάται από όλα τα δείγματα των σημάτων x(n) και h(n).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

α)Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\mathrm{x(n)} * \mathrm{h(n)} = \mathrm{h(n)} * \mathrm{x(n)}$$

β) Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\mathrm{x(n)} * [h(n) * g(n)] = [\mathrm{x(n)} * \mathrm{h(n)}] * g(n)$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ

$$y(a\,\mathrm{x}_1 + b\ \mathrm{x}_2) = ay(\mathrm{x}_1) + b\,y(\mathrm{x}_2)$$

ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟ

$$\mathrm{x}(n-k) \rightarrow y(n-k)$$

γ) Επιμεριστική ιδιότητα

$$\mathrm{x(n)} * [h(n) + g(n)] = \mathrm{x}(n) * h(n) + \mathrm{x(n)} * \mathrm{g(n)}$$

Απόδειξη της αντιμεταθετικής ιδιότητας

$$\mathrm{x(n)} * \mathrm{h(n)} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{h}(\mathrm{n} - k) = \sum_{l} \mathrm{x}(\mathrm{n} - l) h(l) = \sum_{l} h(l)\,\mathrm{x(n-l)} = \mathrm{h(n)} * \mathrm{x(n)}$$

όπου l=n-k (αλλαγή μεταβλητής)

Απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας

θέτουμε $z(n) = h(n) * g(n)$

Τότε : $z(n) = \sum_{k} h(n) g(n-k) = \sum_{l} h(n-l) g(l)$

$$\mathrm{x(n)} * \mathrm{z(n)} = \sum_{\mathrm{k}} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{z}(\mathrm{n} - k)$$

Αλλά $z(n-k) = \sum_{l} h(n-k-l) g(l)$, άρα:

$$\mathrm{x(n)} * \mathrm{z(n)} = \Sigma_{k} \mathrm{x(k)} \Sigma_{l} h(n-k-l) \cdot g(l) = \Sigma\Sigma_{lk} |\mathrm{x}|(k) h[(n-l)-k] g(l)$$

θέτουμε : $y(n) = \mathrm{x}(n) * h(n) = \Sigma_{k} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{h}(\mathrm{n} - k)$

Επομένως : $\Sigma_{k} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{h}[(n-l)-k] \hat{=} y(n-l)$

$$\mathrm{x(n)} * \mathrm{z(n)} = \Sigma y(n-l) g(l) = y(n) * g(n)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ

$$y(n) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{x(n)} * \mathrm{h(n)} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(k)}\,\mathrm{h}(n-\mathrm{k})$$

N+M+1 όροι. Εστω N=3 (x: 0, N-1) και M=5 (h: 0, M-1).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

$$y(0) = h(0)\,\mathrm{x}(0) + 0\cdot \mathrm{x}(1) + 0\cdot \mathrm{x}(2)$$
$$y(1) = h(1)\,\mathrm{x}(0) + \mathrm{h}(0)\,\mathrm{x}(1) + 0\cdot \mathrm{x}(2)$$
$$y(2) = h(2)\,\mathrm{x}(0) + \mathrm{h}(1)\,\mathrm{x}(1) + h(0)\cdot \mathrm{x}(2)$$
$$y(3) = h(3)\,\mathrm{x}(0) + \mathrm{h}(2)\,\mathrm{x}(1) + h(1)\cdot \mathrm{x}(2)$$
$$y(4) = h(4)\,\mathrm{x}(0) + \mathrm{h}(3)\,\mathrm{x}(1) + h(0)\cdot \mathrm{x}(2)$$
$$y(5) = 0\cdot \mathrm{x}(0) + \mathrm{h}(4)\,\mathrm{x}(1) + h(3)\cdot \mathrm{x}(2)$$
$$y(6) = 0\cdot \mathrm{x}(0) + 0\,\mathrm{x}(1) + h(4)\cdot \mathrm{x}(2)$$

Το σύνολο των ανωτέρω σχέσεων εκφράζεται υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ y(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) \\ h(3) & h(2) & h(1) \\ h(4) & h(3) & h(2) \\ 0 & h(4) & h(3) \\ 0 & 0 & h(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}(0) \\ \mathrm{x}(1) \\ \mathrm{x}(2) \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} x(0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(1) & x(0) & 0 & 0 & 0 \\ x(2) & x(1) & x(0) & 0 & 0 \\ 0 & x(2) & x(1) & x(0) & 0 \\ 0 & 0 & x(2) & x(1) & x(0) \\ 0 & 0 & 0 & x(2) & x(1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x(2) \end{vmatrix}$$

$$\underline{h}^T = [h(0) \quad h(1) \quad h(2) \quad h(3) \quad h(4)]$$

$$\underline{y}^T = [y(0) \quad y(1) \quad y(2) \quad y(3) \quad y(4) \quad y(5) \quad y(6)]$$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$$

$$X(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3} + 6z^{-4} + 7z^{-5} + 10z^{-6} + 8z^{-7} + 6z^{-8}$$

$$Y(z) = 2 + 5z^{-1} + 9z^{-2} + 14z^{-3} + 20z^{-4} + 25z^{-5} + 32z^{-6} + 36z^{-7} + 37z^{-8} + 31z^{-9}$$
$$+24z^{-10} + 14z^{-11} + 6z^{-12}$$

Υπολογιστική Πολυπλοκοτητα
N M πολ/μοι
(N-1)(M-1) προσθέσεις

ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

Κυκλική Συνέλιξη: Για περιοδικά σήματα x(n) και h(n), δηλαδή για σήματα για τα οποία ισχύει:

x(n+N)=x(n)
h(n+N)=h(n)

μπορεί να ορισθεί η κυκλική συνέλιξη από τη σχέση :

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{x(k)\,h(n-k)} = \mathrm{x}(n) * h(n)$$

$$\tilde{y} = C_x h$$

$$C_X = \begin{bmatrix} \mathrm{x}(0) & \mathrm{x}(3) & \mathrm{x}(2) & \mathrm{x}(1) \\ \mathrm{x}(1) & \mathrm{x}(0) & \mathrm{x}(3) & \mathrm{x}(2) \\ \mathrm{x}(2) & \mathrm{x}(1) & \mathrm{x}(0) & \mathrm{x}(3) \\ \mathrm{x}(3) & \mathrm{x}(2) & \mathrm{x}(1) & \mathrm{x}(0) \end{bmatrix}$$

$$\underline{h}^T = [h(0) \quad h(1) \quad h(2) \quad h(3)]$$

Οι πίνακες C_h και C_x είναι Toeplitz και κυκλικοί.

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(n)\,y(n-l)}, \qquad -\infty < \mathrm{l} < \infty$$

Ο συντελεστής συσχέτισης $p_{xy}(l)$ είναι ανεξάρτητος από το πλάτος και ορίζεται από την σχέση:

$$p_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{E_x}\sqrt{E_y}}, \qquad -\infty < l < \infty$$

όπου:

$$E_{\mathrm{x}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}^2(n)$$

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n)$$

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

$$r_{\mathrm{xx}}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(n)\,x(n-l)}, \qquad -\infty < l < \infty$$

η ποσότητα

$$p_{\mathrm{xx}}(l) = \frac{r_{\mathrm{xx}}(l)}{E_{\mathrm{x}}}, \qquad -\infty < l < \infty$$

είναι γνωστή σαν συντελεστής αυτοσυσχέτισης

Δεδομένου ότι

$$\mathrm{E_x} = r_{\mathrm{xx}}(0)$$

$$p_{\mathrm{xx}}(l) = \frac{r_{\mathrm{xx}}(l)}{r_{\mathrm{xx}}(0)}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\mathrm{x}(n) * y(-n)\Big|_{n=l} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(m)}\,\mathrm{y}(m-l) = r_{\mathrm{xy}}(l)$$

Ας θεωρήσουμε στην συνέχεια σήματα πεπερασμένης διάρκειας όπως συμβαίνει στις πρακτικές εφαρμογές και έστω 0<n<N-1 το πεδίο ορισμού του x(n) και 0<n<M-1, το πεδίο ορισμού του y(n), με N<M. Η συσχέτιση των δύο σημάτων θα είναι μη μηδενική στο διάστημα :

$$-M+1 \leq l \leq N-1$$

Ιδιότητες της ετεροσυσχέτισης

$a)\quad r_{\mathrm{xy}}(l) = r_{y\mathrm{x}}(-l)$

$b)\quad \left|p_{\mathrm{xy}}(l)\right| \dagger \mathbf{1}$

$g)\quad \left|r_{\mathrm{xy}}(l)\right| \dagger \sqrt{\mathbf{r}_{\mathrm{xx}}(0) r_{\mathrm{yy}}(0)} \dagger \dfrac{r_{\mathrm{xx}}(0) + r_{\mathrm{yy}}(0)}{2}$

Ιδιότητες της αυτοσυσχέτισης

$a)\quad r_{\mathrm{xx}}(l) = r_{xx}(-l)$

$b)\quad \left|r_{\mathrm{xx}}(l)\right| \dagger r_{\mathrm{xx}}(0)$

ΣΗΜΑΤΑ ΙΣΧΥΟΣ

$$r_{xy}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{M} \mathrm{x(n)\,y(n}-l)$$

$$r_{\mathrm{xx}}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{\mathrm{M}} \mathrm{x}(n)\,\mathrm{x}(n-l)$$

$$r_{xy}(l) = \frac{1}{N_p} \sum_{n=o}^{N_p-1} \mathrm{x(n)\,y(n}-l)$$

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΩΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

$$R_{\mathrm{xy}}(z) = X(z)Y(z^{-1})$$

$$R_{\mathrm{xx}}(\mathrm{z}) = X(\mathrm{z})X(\mathrm{z}^{-1})$$

ΤΥΧΑΙΑ ΣΗΜΑΤΑ

$P_x(x_1;n_1)=\text{Prob}\{x(n_1) \leq x_1\}$

Κατανομή πρώτης τάξεως του x(n).

Η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας θα ορίζεται από την σχέση

$$p_x(x_1;n_1)=\frac{dP_x(x_1;n_1)}{d\,x_1}$$

Η κατανομή δεύτερης τάξεως του σήματος x(n) ορίζεται από την
$P_x(x_1, x_2, ; n_1, n_2)=\text{Prob}\{x(n_1) \leq x1, x(n_2) \leq x_2\}$

Η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητες ορίζεται από την σχέση:

$$\partial^2 P_x(x_{1,}x_2;n_{1,}n_2)/\partial\,x_1\,\partial\,x_2 = p_x(x_1,x_2;n_1,n_2)$$

ΣΤΑΤΙΣΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Η μέση τιμή $m_x(n)$ ενός τυχαίου σήματος ορίζεται σαν η μαθηματική ελπίδα (η προσδοκητή τιμή) της τυχαίας μεταβλητής x(n)

$$m_x(n) = E\{x(n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x;n) dx$$

Η μεταβλητότητα (variance) του x(n) ορίζεται από την σχέση :

$$s_x^2(n) = E\{[x(n) - m_x(n)]^2\}$$

Η αυτοσυσχέτιση (autocorrelation) ενός τυχαίου σήματος ορίζεται από την σχέση:

$$r_{xx}(n_1, n_2) = E\{x(n_1)\,x(n_2)\}$$

Η αυτοσυμμεταβλητότητα (autocovariance) του x(n) ορίζεται από:

$$V_{xx}(n_1, n_2) = E\{[x(n_1) - m_x(n_1)][x(n_2) - m_x(n_2)]\}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$V_{xx}(n_1, n_2) = r_{xx}(n_1, n_2) - m_x(n_1) m_x(n_2)$$

Στην περίπτωση δύο σημάτων x(n) και y(n) ορίζουμε την ετεροσυσχέτιση (crosscorrelation) και την ετεροσυμμεταβλητότητα (crosscorariance) από τις σχέσεις:

$$r_{xy}(n_1, n_2) = E\{x(n_1)\,y(n_2)\}$$

$$V_{xy}(n_1, n_2) = E\{[x(n_1) - m_x(n_1)][y(n_2) - m_y(n_2)]\}$$

ΣΤΑΣΙΜΑ ΣΗΜΑΤΑ

Ένα τυχαίο σήμα λέγεται στάσιμο ευρείας – έννοιας όταν η μέση τιμή του

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x(n)}\} = m_{\mathrm{x}}$$

είναι σταθερή, και η αυτοσυσχέτιση

$$r_{\mathrm{xx}}(\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2) = \mathrm{E}\{\mathrm{x(n)}\,\mathrm{x(n}-l\} = r_{\mathrm{xx}}(l)$$

εξαρτάται μόνο από την διαφορά $l = n_1 - n_2$.

Στην περίπτωση αυτή και η αυτοσυμμεταβλητότητα

$$V_{\mathrm{xx}}(l) = r_{\mathrm{xx}}(l) - m_{\mathrm{x}}^2$$

εξαρτάται μόνο από την χρονική διαφορά l.

Δύο τυχαία σήματα x(n) και y(n) ονομάζονται από κοινού στάσιμα ευρείας έννοιας (jointly wide – sense stationary) αν κάθε ένα από αυτό είναι στάσιμο ευρείας έννοιας και συγχρόνως η ετεροσυσχέτιση τους

$$r_{\mathrm{xy}}(n_1, n_2) = r_{\mathrm{xy}}(l) = \mathrm{E}\{\mathrm{x(n)}\,\mathrm{y(n}-l)\}$$

εξαρτάται μόνο από το $l = n_1 - n_2$

Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$V_{\mathrm{xy}}(l) = r_{\mathrm{xy}}(l) - m_{\mathrm{x}} m_y$$

ΣΤΑΣΙΜΑ ΤΥΧΑΙΑ ΣΗΜΑΤΑ

Ένα τυχαίο σήμα x(n) ονομάζεται στάσιμο τάξεως N αν ισχύει η επόμενη σχέση ∀k:

$p_x(x_1, \ldots, x_N, n_1,\ldots,n_N)=p_x(x_1,\ldots,x_N;n_1+k,\ldots,n_N+k)$

Αν η προηγούμενη σχέση ισχύει για όλες τις τάξεις N=1,2... τότε το σήμα λέγεται στάσιμο με αυστηρή έννοια (strict-sense)

Για δύο σήματα x(n) και y(n) που είναι από κοινού στάσιμα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

$$\left|r_{xx}(l)\right| \dagger\ r_{xx}(0)$$
$$r_{xx}(-l) = r_{xx}(l)$$
$$r_{xx}(0) = E\{x^2(n)\}$$
$$r_{xy}(-l) = r_{yx}(l)$$
$$\left|r_{xy}(l)\right| \dagger\ \left|r_{xx}(0) r_{yy}(0)\right|^{1/2} \dagger\ \frac{1}{2}\left|r_{xx}(0) + r_{yy}(0)\right|$$

ΧΡΟΝΙΚΟΙ ΜΕΣΟΙ

Μέση τιμή

$$< \mathrm{x}(\mathrm{n}) >= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{M} \mathrm{x}(\mathrm{n})$$

Τετραγωνικός μέσος

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{\mathrm{M}} \left|\mathrm{x}(n)\right|^2$$

Αυτοσυσχέτιση

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{\mathrm{M}} \mathrm{x}(\mathrm{n})\,\mathrm{x}(\mathrm{n}-l)$$

ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

Ένα τυχαίο σήμα είναι εργοδικό κατά συσχέτιση / μέση τιμή

$$< \mathrm{x}(\mathrm{n})\,\mathrm{x}(n-l) >= \mathrm{E}\{\mathrm{x}(\mathrm{n})\,\mathrm{x}(\mathrm{n}-l)$$

Στην πράξη

$$< \mathrm{x}(\mathrm{n}) >= \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{\mathrm{M}} \mathrm{x}(\mathrm{n})$$

$$< \mathrm{x}(n)\,\mathrm{x}(\mathrm{n}-l) >= \frac{1}{(2M+1)} \sum_{n=-M}^{\mathrm{M}} \mathrm{x}(\mathrm{n})\,\mathrm{x}(\mathrm{n}-l)$$