Μετασχηματισμός Laplace

ορίζεται ως εξής : $X(s) = L[\mathrm{x}(t)] = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται από το μιγαδικό ολοκλήρωμα :

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_{c} X(s)e^{st}dt$$

C είναι μία καμπύλη που πρέπει να περιλαμβάνει όλες τις ιδιάζουσες τιμές του X(s).

Ιδιότητα	Μαθηματική Σχέση
Γραμμικότητα	$\mathrm{ax(t)} + by(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} \mathrm{a}\,X(s) + bY(s)$
n-οστής Παραγώγου στον Χρόνο	$\frac{\mathrm{dx}(t)}{\mathrm{dt}} \overset{L}{\Leftrightarrow} sX(s) - \mathrm{x}(0)$
Αλλαγή Κλίμακας Χρόνου	$\mathrm{x(at)} \overset{L}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\mathrm{a}} X(\frac{s}{\mathrm{a}})$
n- οστού Ολοκληρώματος στον Χρόνο	$\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t}}_{n} \mathrm{x(t)(dt)^n} \overset{L}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{X(s)}}{s^n} + \frac{\mathrm{x}^{-1}(0)}{\mathrm{s^n}} + \frac{\mathrm{x}^{-2}(0)}{\mathrm{s^{n-1}}} + \ldots + \frac{\mathrm{x}^{-n}(0)}{s}$
Μετάθεση στον Χρόνο	$\mathrm{x(t-a)} \overset{L}{\Leftrightarrow} e^{-\mathrm{as}} X(s)$
Μετάθεση στο s	$e^{-\mathrm{at}}\,\mathrm{x(t)} \overset{L}{\Leftrightarrow} X(s+\mathrm{a})$
Πολ/σμος με $\mathrm{t^n}$	$t^n\,\mathrm{x}(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
Διαίρεση με $\mathrm{t^n}$	$\frac{\mathrm{x(t)}}{\mathrm{t^n}} \overset{L}{\Leftrightarrow} \underbrace{\int_{s}^{+\infty}\cdots\int_{s}^{+\infty}}_{\mathrm{n}} \mathrm{X(s)(ds)^n}$
Συνέλιξη	$\int_{0}^{t} \mathrm{x}(\mathrm{t}-\tau)y(\tau)d\tau \overset{L}{\Leftrightarrow} X(s)Y(s)$
Αρχική Τιμή	$\lim_{t\to 0}\mathrm{x(t)} \overset{L}{\Leftrightarrow} \lim_{s\to\infty} s\,\mathrm{X(s)}$
Τελική Τιμή	$\lim_{t\to\infty}\mathrm{x(t)} \overset{L}{\Leftrightarrow} \lim_{s\to 0} s\,\mathrm{X(s)}$

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Μετασχηματισμοί στον Διακριτό χρόνο – Μετασχηματισμός z

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k}=x(0)+x(1)z^{-1}+\ldots$$

$z=re^{j\Omega}$, $|z|>|z_0|$

(Μονόπλευρος)

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

(Αμφίπλευρος – Απαιτείται περιοχή σύγκλισης)

$z=e^{j\Omega}$

(Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Σήματος)

Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

1) δ[n] **à** Δ(z) = 1

2) u[n] **à** U(z)= z/z-1, |z|>1

3) α^n **à** A(z) = z/z-α, $|az^{-1}|<1$,

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (az^{-1})^k = 1/(1 - az^{-1}) = z/(z-a)$$

Μονόπλευρος = Αμφίπλευρος (αιτιατό σήμα)

Αν υπολογίσουμε τον αμφίπλευρο μετασχηματισμό z του σήματος

$x[n]=-\alpha^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n = z/z-a$$

X(z) = z/z-α, $|za^{-1}|<1$,

Ιδιότητες

Για αιτιατά σήματα

x[n-m] **à** $z^{-m}X[z]$

Με αρχικές συνθήκες

x[n-m] **à** $z^{-m}X[z] + \sum_{i=1}^{m} x(-i) z^{-m+i}$

Y[z] = X[z] H [z]

A[z]Y[z] = B[z] X[z]

H[z] = $\sum_{i=0}^{q} b(i) z^{-i} \,/\, \sum_{i=1}^{p} a(i) z^{-i}$

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα διακριτού χρόνου $2^{ης}$ τάξης με συνάρτηση μεταφοράς, H(z):

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \mathrm{a}_1 z^{-1} + \mathrm{a}_2 z^{-2}}, (\mathrm{b}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2) \in R$$

και συζυγείς μιγαδικούς πόλους $r_{1,2} = r_0 \cdot e^{\pm j\Omega_0}$.

$$\mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{b}_0 z^2}{z^2 + \mathrm{a}_1 z + \mathrm{a}_2} \Rightarrow$$

$$z^2 + \mathrm{a}_1 z + \mathrm{a}_2 = (z - r_0 e^{j\Omega_0}) \cdot (z - r_0 e^{-j\Omega_0}) = z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0) \cdot z + r_0^2$$

Επομένως : a_1=-2r_0 cos(Ω_0) και a_2=r_0^2.

Για να βρούμε την απόκριση μοναδιαίου παλμού, θα πρέπει να φέρουμε την συνάρτηση μεταφοράς στην μορφή :

$\frac{\mathrm{H(z)}}{z} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2}$. Έχουμε:

$$H(z) = \frac{b_0 Z^2}{z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0) \cdot z + r_0^2} \Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{b_0 z \cdot r_0 \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0) \cdot z + r_0^{\,2}} \cdot \frac{1}{r_0 \sin(\Omega_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{H(z)} = \frac{b_0}{r_0 \sin(\Omega_0)} \cdot \mathrm{z} \cdot \frac{\mathrm{z} \cdot r_0 \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2r_0 \cos(\Omega_0) \cdot z + r_0^{\,2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(n) = Z^{-1}\{H(z)\} = \frac{b_0}{r_0 \sin(\Omega_0)} r_0^{n+1} \cdot \sin[(n+1)\Omega_0] \cdot u(n) \qquad ή$$

$$h(n) = \frac{b_0}{\sin(\Omega_0)} \cdot r_0^n \cdot \sin[(n+1)\Omega_0] \cdot u(n)$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ

Ο αντίστροφός μετασχηματισμός z ορίζεται από την σχέση:

$$\mathrm{x}(n) = \frac{1}{2p\,j} \oint_{c} X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

όπου C είναι μια κλειστή καμπύλη οριζόμενη εντός της περιοχής σύγκλισης και περιέχει την αρχή των αξόνων. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί με χρησιμοποίηση του (θεωρία μιγαδικών αριθμών) θεωρήματος του Cauchy.

Στην συνέχεια θα δώσουμε πρακτικές μεθόδους για τον υπολογισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού z. Πρόκειται για την μέθοδο της ατέρμονος ή μακριάς διαίρεσης (long division) και την μέθοδο ανάπυξης σε μερικά κλάσματα (partial fraction expansion). Και οι δύο αυτές μέθοδοι δεν θα βασιστούν στον προηγούμενο ορισμό.

Μέθοδος της μακράς διαίρεσης : Όταν έχουμε τον μετασχηματισμό z υπό την μορφή κλάσματος δύο πολυωνύμων διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή. Συνήθως η διαίρεση εξαντλείται.

Παράδειγμα 1^{o} : Έστω $X(z) = \dfrac{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}$. Μετά από διαίρεση έχουμε:

$$X(z) = 1 - z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} - \frac{1}{4} z^{-3} + \ldots$$

Επομένως:

$$\mathrm{x(n)} = d(n) - (-\frac{1}{2})^{n-1} u(n-1)$$

Παράδειγμα 2^{o} : Έστω $\mathrm{X(z)} = \dfrac{\mathrm{z}^{2} + z}{z^{3} - 2z^{2} + 3z - 1}$.Μετά από διαίρεση έχουμε:

$$\mathrm{X(z)} = \mathrm{z}^{-1} + 4z^{-2} + 9z^{-3} + 16z^{-4} + \ldots$$

Επομένως είναι φανερό ότι:

$$\mathrm{x(n)} = \mathrm{n}^{2}\, u(n)$$

Η προηγούμενη μέθοδος δεν οδηγεί πάντα σε “**κλειστή λύση**” για την εύρεση του αντιστρόφου μετασχηματισμού z. Είναι εντούτοις χρήσιμη σε περιπτώσεις που αναζητούνται μερικές τιμές του σήματος σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές ή όταν η κλειστή λύση είναι τόσο πολύπλοκη που είναι προτιμότερο να εκφράσουμε το x(n) σαν δυναμοσειρά.

Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα : Η μέθοδος είναι γενικά γνωστή και από την θεωρία των σημάτων συνεχούς χρόνου και χρησιμοποιείται εκεί για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 2° : Εστω $X(z) = \frac{2z^2}{(z+1)(z+2)^2}$. Να βρεθεί το x(n).

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z}{(z+1)(z+2)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2}$$

$$A = (z+1)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=1} = -2$$

$$B = \frac{d}{dz}\left\{(z+2)^2\frac{X(z)}{z}\right\}_{z=-2} = 2$$

$$C = (z+2)^2\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=-2} = 4$$

Αρα : $\frac{X(z)}{z} = \frac{-2}{1+z^{-1}} + \frac{2}{1+2z^{-1}} + \frac{4z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2}$

Επομένως : $\mathrm{x(n)} = -2(-1)^{\mathrm{n}} + 2(-2)^n + n(-2)^{n+1}, \quad n \geq 0$

Τα προηγούμενα μπορούν να γενικευτούν για οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση του z.

Αν η τάξη του αριθμητή του κλάσματος είναι μεγαλύτερη από την τάξη του παρονομαστή, και έστω ο αριμθητής τάξης q και ο παρονομαστής p, θα έχουμε:

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_{i=0}^{q-p} c_i z^i + \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{z - \mathrm{z}_i} + \sum_{i=1}^{r} \frac{B_i}{(z-\mathrm{z}_0)^i}$$

Η προηγούμενη σχέση υποθέτει ότι υπάρχει πόλος $z=z_o$ με βαθμό πολλαπλότητας r.

Οι συντελεστές B_i μπορούν να υπολογιστούν από τον εξής γενικό τύπο :

$$B_i = \frac{1}{(r-i)!}\left\{\frac{d^{r-i}}{dz^{r-i}}[z-z_0]^r\frac{X(z)}{z}\right\}$$

Ευστάθεια στο επίπεδο z

Γνωρίζουμε την συνθήκη για ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος όταν εκφράζεται με την απόκριση παλμού.

Στην περιπτωση συστήματος με εξισώσεις διαφόρων ή ευστάθεια εξαρτάται από την θέση των πόλων σε σχέση με τον μοναδιαίο κύκλο.

Γενικά, αν ένας πόλος είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

Από την ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα του μετασχηματισμού κατά z είναι προφανές ότι για σήμα με πόλους βαθμού πολλαπλότητας 1, θα έχουμε :

$$\mathrm{x(n)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{c_i} \cdot \left(d_i\right)^n$$

Για την γενικότερη περίπτωση που ο κάθε πόλος έχει βαθμό πολλαπλότητας r_i

$$\mathrm{x(n)} = \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{c_i} n^{(r_i-1)} (d_i)^n$$

Και στις δύο προηγούμενες σχέσεις d_i είναι οι διάφοροι πόλοι. Η συμπεριφορά του σήματος ή του συστήματος θα καθορίζεται από τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, έστω $|d_o|$, βαθμού πολλαπλότητας r_0.

Αν $|d_0|<1$ ο αντίστοιχος όρος μειώνεται με την αύξηση του n .

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} [n^{(r_0-1)} \left|d_0\right|^n] = 0, \qquad me \left|d_0\right| < 1$$

Αν $|d_0|>1$ το x(n) μπορεί να αυξάνεται χωρίς φραγμό.

Πράγματι τότε $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} [n^{(r_0-1)} \left|d_0\right|^n] \to \infty, \qquad me \left|d_0\right| > 1$

Στην περίπτωση $|d_0|=1$, το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον βαθμό πολλαπλότητας του αντίστοιχου πόλου.

Για $r_0 \geq 2$ έχουμε ότι: $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} [n^{(r_0-1)} \left|d_0\right|^n] \to \infty,$

Στην περίπτωση $r_0=1$, η συνεισφορά του αντίστοιχου πόλου θα έχει μία από τις μορφές :

$$(a) c \cdot (1), (b) c \cdot (-1), (g) c \cdot \cos(nq + f)$$

Για απλούς πόλους που βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου έχουμε σήματα ή συστήματα οριακά ευσταθή.

Τα ανωτέρω ισχύουν τόσο για τον μετασχηματισμό z ενός σήματος όσο και για την συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος. Επομένως η ευστάθεια της εξόδου ενος ΓΧΑ συστήματος εξαρτάται τόσο από την ευστάθεια του σήματος εισόδου όσο και από την ευστάθεια του συστήματος.

Σύνδεση Μετασχηματισμού z και Μετασχηματισμού Laplace (s).

Όπως γνωρίζουμε οι αντίστοιχοι μετ/σμοι δίνονται από τις σχέσεις:

$$X(s) = L\{\mathrm{x(t)}\} = \int_0^{\infty} \mathrm{x(t)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} dt$$

$$X(z) = Z\{\mathrm{x(n)}\} = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty} \mathrm{x(n)}\, \mathrm{z}^{-\mathrm{n}}$$

όπου x(t)=0,   t<0 (αιτιατό σήμα).

Ας θεωρήσουμε το σήμα x(n), ως το γίνομενο του σήματος x(t) και μιας παλμοσειράς δέλτα, s(t). Δηλαδή:

$$\mathrm{x_s}(t) = \mathrm{x(t)} \cdot \mathrm{s(t)} = \mathrm{x(t)} \sum_{n=0}^{+\infty} d(t - nT_s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{x(nT_s)}\, d(t - nT_s)$$

Για τον μετασχηματισμό Laplace αυτού του σήματος $x_s(t)$ θα έχουμε :

$$X_s(s) = L\{\mathrm{x_s}(t)\} = \int_0^{+\infty} \mathrm{x_s}(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{x(nT_s)}\, d(t - nT_s)\Big) e^{-st} dt =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{x(nT_s)} \underbrace{\int_0^{+\infty} d(t - nT_s) e^{-st} dt}_{e^{-s \cdot n \cdot T_S}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{x}(nT_s) \cdot e^{-snT_S}$$

Αν θέσουμε e^{sT_S} =z:

$$\mathrm{X_s}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\mathrm{x(nT_s)}}_{x(n)} \cdot e^{-snT_S} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{x}(n) \cdot z^{-n} = X(z)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι : $X(z) = X_s(s)\big|_{s=\frac{1}{T_S}\ln(z)}$, διότι $z = e^{sT_S}$

Άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον μετ/σμό z ενός σήματος διακριτού χρόνου, x(n), μέσω του μετ/σμού Laplace του σήματος $x_s(t)$

Βάσει αυτής της αντιστοιχίας μεταξύ των δύο μεταβλητών s και z ($z=e^{sT}$) μπορούμε να προσδιορίσουμε τον τρόπο απεικόνισης του s- επιπέδου στο z- επιπεδο.

$$s = s + jw \Rightarrow z = e^{sT_S} = e^{(s+jw)T_S} = e^{sT_S} \cdot e^{jwT_S}$$

$$|z| = \left|e^{sT_S} \cdot e^{jwT_S}\right| = \left|e^{sT_S}\right| \cdot \Big|\underbrace{e^{jwT_S}}_{1}\Big| = \left|e^{sT_S}\right|$$

Συνεπώς αν: σ<0⇒|z|<1
σ>0⇒|z|>1
σ=0⇒|z|=1

Επιπλέον, επειδή ο μετ/σμος $X_s(s)$ είναι περιοδικός με περίοδο $j\frac{2p}{T_s}$ η γενικότερα $jk\frac{2p}{T_s}$.

k= ±1, ±2, ±3, ……., διότι :

$$X_s(s + j\frac{2p}{T_s}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_s) \cdot e^{-(s+j\frac{2p}{T_s})nT_s} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_s) \cdot e^{-snT_s} \cdot \underbrace{e^{-2jpn}}_{1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT_s) \cdot e^{-snT_s} = X_s(s)$$

Θα έχουμε την εξής αντιστοιχία :

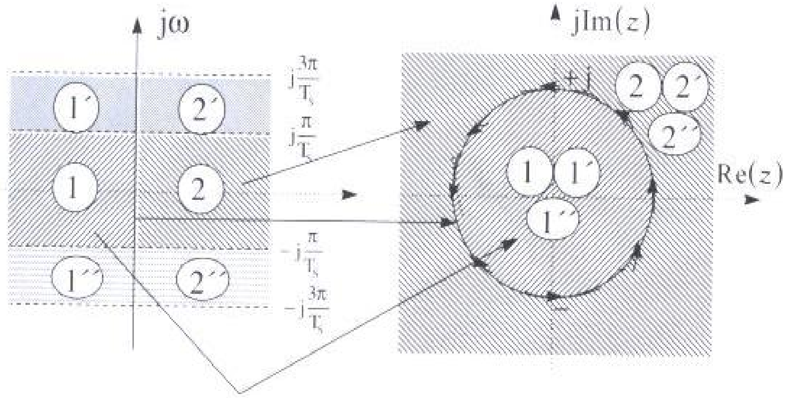
α) Περιοχές του αρνητικού ημιεπιπέδου s (σ<0) με εύρος $j\frac{2p}{T_s}$ θα απεικονίζονται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z – επίπεδο (|z|<1) . (περιοχές 1, 1΄,1΄΄, κ.λ.π.)

β) Περιοχές του θετικού ημιεπιπέδου s (σ>0) με εύρος $j\frac{2p}{T_s}$ θα απεικονίζονται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο z – επίπεδο (|z|>1 . (περιοχές 2, 2΄,2΄΄, 2΄΄΄κ.λ.π.)

γ) Τμήματα του φανταστικού άξονα jω (σ=0) με μήκος $\frac{2p}{T_s}$ θα απεικονίζονται στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου και η “διαδρομή” απο το σημείο $-j\frac{p}{T_s}$ έως το σημείο $+j\frac{p}{T_s}$ επάνω στον jω – άξονα στο επίπεδο s θα αντιστοιχεί σε διαδρομή από το jπ έως στο + jπ επάνω στην περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο.

1.

S - επίπεδο $\quad e^{sT_s} = z \quad$ z - επίπεδο



Παράδειγμα

Έστω το σήμα διακριτού χρόνου x(n)=e^{-an}.u(n). Προφανώς αυτό το σήμα έχει προέλθει από την δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου x(t)=e^{-at}.u(t) με την υπόθεση ότι Ts=1. Αν ακολουθήσουμε την διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως θα έχουμε :

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\, u(t) \Rightarrow \mathrm{x}_s(t) = \mathrm{x(t)} \cdot \mathrm{s(t)} = \mathrm{x(t)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} d\,(t - nT_S) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{x}(\mathrm{nT}_S) d\,(t - \mathrm{nT_S}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\mathrm{anT_S}} d\,(t - nT_S)$$

Ο μετ/σμός Laplace θα είναι :

$$\mathrm{X_S}(s) = L\{\mathrm{x_S}(t)\} = \int_0^{+\infty} (\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\mathrm{anT_S}} d\,(t - nT_S)) e^{-st} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\mathrm{anT_S}} e^{-snT_S} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n(s+\mathrm{a})\mathrm{T_S}}$$

$$\mathrm{X}_s(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T_s}},$$

υπό την προϋπόθεση ότι $\left| e^{-(s+\mathrm{a})T_s} \right| < 1$

Με την αντικατάσταση $s = \frac{1}{T_s} 1n(z)$ θα έχουμε:

$$\mathrm{X(z)} = \mathrm{X_s}(s)\Big|_{s=\frac{1}{T_S}1n(z)} = \frac{1}{1 - e^{-(s+\mathrm{a})\mathrm{T_S}}}\Bigg|_{s=\frac{1}{T_S}1n(z)} = \frac{1}{1 - e^{-1n(z)} \cdot e^{-\mathrm{aT_S}}} = \frac{1}{1 - z^{-1} \cdot e^{-\mathrm{aT_S}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1} \cdot e^{-\mathrm{a}}}$$

επειδή $\mathrm{T_S}$=1

Πράγματι :

$$\mathrm{X(z)} = \mathrm{Z}\{\mathrm{x(n)}\} = Z\{e^{-\mathrm{an}}\} = Z\{(e^{-\mathrm{a}})^n\} = \frac{1}{1 - z^{-1} \cdot e^{-\mathrm{a}}}.$$